

Variace s opakováním

Příklady

① Kolik uspořádaných dvojic lze vytvořit z prvků a, b, c tak, že

a) žádný se neopakuje

$$p = V(2,3) = 3 \cdot 2 \quad [(a,b), (a,c), (b,a), (b,c), (c,a), (c,b)]$$

b) prvky se mohou opakovat

$$\text{jako a), navíc } (a,a), (b,b), (c,c) \quad p = 9 = 3^2 = V'(2,3)$$

② Kolik je uspořádaných k -tic z n prvků, v nichž se každý prvek může opakovat (max. k krát) využ. kombinatorické pravidlo součinu (postupný výběr)

1. člen lze vybrat ... n způsoby

2. člen lze vybrat ... n způsoby (mohou se opak.)

⋮

k -tý člen lze vybrat ... n způsoby

$$p = \underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k\text{krát}} = n^k = V'(k,n)$$

K -členná variace s opakováním (variace k -té třídy s opakováním) z n prvků je uspořádaná k -tice (záleží na pořadí) z těchto n prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše k -krát

POČET všech k -členných variací s opakováním z n prvků $V'(k,n) = n^k$

③ Kolik je

a) 3členných variací s opakováním ze 4 prvků

$$V'(3,4) = 4^3$$

b) 4členných variací s opakováním ze 3 prvků

$$V'(4,3) = 3^4$$

c) 4členných variací s opakováním ze 4 prvků

$$V'(4,4) = 4^4$$

d) 3členných variací bez opakování ze 4 prvků

$$V(3,4) = 4 \cdot 3 \cdot 2$$

e) 4členných variací bez opakování ze 3 prvků

nelze $k = 4, n = 3$ (musí platit $n \geq k$)!

f) 4členných variací bez opakování ze 4 prvků

$$V(4,4) = P(4) = 4!$$

④ Kolik poznávacích značek osobních aut lze vytvořit, jestliže na prvních třech místech jsou písmena (z 28) a na dalších 4 číslice (z 10)

vyb. 3 písmena z 28 s opak. a 4 číslice z 10 s opak., zákl. na pořadí

$$p = V'(3,28) \cdot V'(4,10) = 28^3 \cdot 10^4 = 219\,520\,000$$

⑤ Určete počet všech podmnožin

a) 3prvkové množiny s prvky a, b, c $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}$

přeznačíme takto: $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1)$

$\Rightarrow$ lze převést na počet uspořádaných 3jic s opakováním ze 2 prvků 0, 1 $\Rightarrow$

$$p = V'(3,2) = 2^3 = 8$$

b) k -prvkové množiny

vytvoříme k -tice ze 2 prvků s opakováním, záleží na pořadí $\Rightarrow p = V'(k,2) = 2^k$

POČET PODMNOŽIN k -prvkové množiny je $p = V'(k,2) = 2^k$

- ⑥ Kolika způsoby lze všechny prvky k -prvkové množiny rozmístit

a) do 2 přihrádek (řešte nejprve pro $k = 3$)

$$k = 3$$

přihrádka A	—	a	b	c	a, b	a, c	b, c	a, b, c
přihrádka B	a, b, c	b, c	a, c	a, b	c	b	a	—

$\Rightarrow$ tolik způsobů, jako je počet podmnožin množiny $\{a, b, c\}$

$$p = V'(k, 2) = 2^3$$

$$\text{obecně pro } k: p = V'(k, 2) = 2^k$$

b) do r přihrádek

$$p = V'(k, r) = r^k$$

- ⑦ Na panelu je k žárovek, z nichž každá může svítit zeleně, oranžově nebo červeně. Kolik různých stavů může panel signalizovat? např. ZZZ...0ZČOČČZ

k -tice s opak. ze 3 prvků, zál. na poř. $\Rightarrow p = V'(k, 3) = 3^k$

- ⑧ Kolik různých telefonních stanic lze zapojit na telefonní centrále, jsou-li všechna čísla stanic

a) šesticiferná uspoř. 6tice z 10 čísel, lze opak. $V'(6, 10) = 10^6$

b) šesticiferná nezačínající 0 počet všech — počet s 0 na začátku

$$p = V'(6, 10) - V'(5, 10) = 10^6 - 10^5$$

0
lib. 5tice z 10 č. s opak.

$$p = 1\,000\,000 - 100\,000 = 900\,000$$

- ⑨ Určete počet všech přirozených čísel menších než milion, která lze zapsat dekadicky pouze s použitím číslic 5, 8. $< 1\,000\,000$ např. 58558, 888 888 největší

vyb. 6ciferná nebo 5cifer. nebo 4cifer. nebo 3cifer. nebo 2cifer. nebo 1cifer. ze 2 čísel s opak., záleží na pořadí

$$p = V'(6, 2) + V'(5, 2) + V'(4, 2) + V'(3, 2) + V'(2, 2) + V'(1, 2) =$$

$$p = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 = 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 = 126$$

- ⑩ Určete, kolik značek Morseovy abecedy lze vytvořit sestavením teček a čárek do skupin o 1 až 4 prvcích?

1. prvkové 2. zp. $\cdot$ (erb), — (tůň)

2. prvkové $V'(2, 2) = 2^2 = 4$ $--$ (akát), $-\cdot$ (nástup), $\cdot\cdot$ (ibis), $---$ (mává)

3. prvkové $V'(3, 2) = 2^3 = 8$ $\cdots$ (sekera), $----$ (království), $-\cdots$ (dálava)

4. prvkové $V'(4, 2) = 2^4 = 16$ $-----$ (z), $-----$ (ch), $-----$ (b), $-----$ (c), $-----$ (f)

celkem 30 značek

- ⑪ Kufřík má heslový zámek, na každém z pěti kotoučů musíme nastavit správnou číslici z 9 číslic. Určete maximální počet pokusů, které bychom museli provést, pokud zapomeneme heslo?

5tice z 9 číslic s opakováním, zál. na poř. $\Rightarrow p = V'(5, 9) = 9^5 = 59\,049$

[kdyby trvalo 3 s vyzkoušení 1 zp. $\Rightarrow$ potřebná doba $t = 3 \cdot p = 3 \cdot 59\,049$ s =

$$= 177\,147 \text{ s} = 2\,952 \text{ min } 27 \text{ s} = 49 \text{ h } 12 \text{ min } 27 \text{ s} = 2 \text{ d } 1 \text{ h } 12 \text{ min } 27 \text{ s}]$$